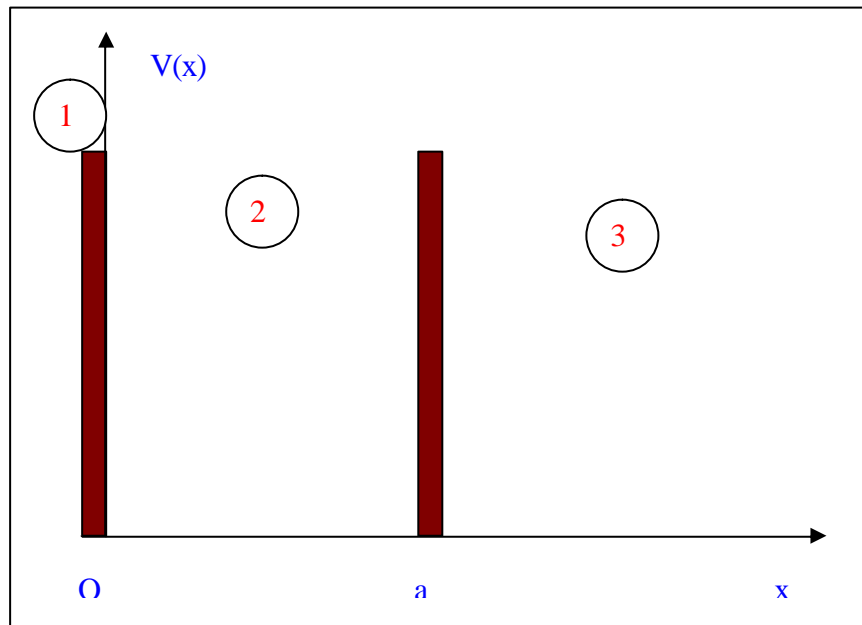


## Exercice 1 :

Soit une particule de masse  $m$ , astreinte à se déplacer dans le segment  $[0, a]$ .

Le potentiel auquel soumise la particule est un puits de potentiel infini de largeur  $a$ .

- L'énergie de la particule ?
- La fonction d'onde de cette particule ?



- Zone (1) :  $x \leq 0$
- Zone (2) :  $0 \leq x \leq a$
- Zone (3) :  $x \geq a$

La particule n'existe pas dans les zones (1) et (3), donc

$$y_1(x) = 0 \text{ et } y_3(x) = 0$$

$$\text{donc } y(x) = y_1(x) + y_2(x) + y_3(x) = y_2(x)$$

Résolution de l'équation de Schrödinger :

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \Delta \mathbf{y}(x) + V(x) = E \mathbf{y}(x)$$

La particule se déplace suivant ox (sur l'axe ox) donc  $V(x) = 0$ .

$\Rightarrow$

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{y}(x) = E \mathbf{y}(x)$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{y}(x) + \frac{2mE}{\hbar^2} \mathbf{y}(x) = 0$$

On pose :  $\mathbf{w}^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \Rightarrow$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{y}(x) + \mathbf{w}^2 \mathbf{y}(x) = 0$$

Le polynôme caractéristique de cette équation est :

$$r^2 + \mathbf{w}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 = -\mathbf{w}^2 = (i\mathbf{w})^2$$

$$\Rightarrow \quad r_1 = -i\mathbf{w} \quad \text{et} \quad r_2 = i\mathbf{w}$$

$$\Rightarrow \mathbf{y}(x) = C e^{i\mathbf{w}x} + D e^{-i\mathbf{w}x} = A \cos(\mathbf{w}x) + B \sin(\mathbf{w}x)$$

Continuité de la fonction d'onde :

$$\mathbf{y}_1(0) = \mathbf{y}_2(0) = 0 = A \quad \text{et} \quad \mathbf{y}_3(a) = \mathbf{y}_2(a) = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{y}(a) = \mathbf{y}_2(a) = B \sin(\mathbf{w}a) \quad \text{avec} \quad B \neq 0$$

si  $B=0$  alors la particule n'existe pas dans la zone (2), donc il faut que

$$B \neq 0$$

$$\mathbf{y}_2(a) = 0 \quad \Rightarrow \quad B \sin(\mathbf{w}a) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{w}a = n\mathbf{p} \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{w} = \frac{n\mathbf{p}}{a} \quad n \in \mathbb{N}$$

L'énergie de la particule est:

$$E_n = \frac{\hbar^2 \mathbf{p}^2 n^2}{2m a^2}$$

La fonction d'onde de la particule est :

$$\mathbf{y}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ B \sin(\mathbf{w}x) & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{si } x > a \end{cases}$$

La condition de normalisation :  $\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathbf{y}(x)|^2 dx = 1 \Leftrightarrow$

$$\int_0^a |\mathbf{y}(x)|^2 dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^a \sin^2(\mathbf{w}x) dx = 1$$

avec  $\sin^2(\mathbf{q}) = \frac{1 - \cos(2\mathbf{q})}{2}$

$$\begin{aligned} B^2 \int_0^a \sin^2(\mathbf{w}x) dx &= B^2 \int_0^a \frac{1}{2} dx + \frac{B^2}{2} \int_0^a \cos(2\mathbf{w}x) dx \\ &= \frac{1}{2} B^2 [x]_0^a - \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin(2\mathbf{w}x)}{2\mathbf{w}} \right]_0^a \end{aligned}$$

$$B^2 \frac{a}{2} = 1$$

$$\Rightarrow B^2 = \frac{2}{a} \Rightarrow B = \pm \sqrt{\frac{2}{a}}$$

On choisit B positif, donc

$$\mathbf{y}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{\frac{2}{a}} \sin(n\frac{\mathbf{p}}{a}x) & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{si } x > a \end{cases}$$

