Série 7

Exercice 1 :

Soit $\mathbf{H_0}$ l'hamiltonien d'un oscillateur harmonique a une dimension, donné par :

$$H_0 = \frac{P^2}{2m} + \frac{mw^2x^2}{2}$$

On considère le cas des trois perturbations suivantes :

- $W = l\hbar w\,\hat{x}$, ou $\hat{x} = bx$ avec $b = (mw/\hbar)^{1/2}$ et $l \ll 1$ est une constante réelle.
- $W = \frac{1}{2} l\hbar w \hat{x}^2$
- $W = l\hbar w \hat{x}^3$

a) Chercher la solution exacte de l'équation ax valeurs propre et donner les valeurs propres $\mathbf{E_n}$ et états propres $|y_n\rangle$.

b) Trouver le spectre d'énergie en utilisant la théorie de la perturbations stationnaires. Comparer.

Exercice 2 :

A. On considère l'expérience de Stern et Gerlach, dans laquelle on étudie la déviation d'un jet d'atomes neutres paramagnétiques (atomes d'argent par exemple), dans un

champ magnétique uniforme $\overrightarrow{B_0}$ parallèle à **Oz**. Le spin $\vec{S}$ de l'atomes

d'argent dans son état fondamental est S =1/2. Le moment magnétique $\overrightarrow{M}$ est

lié à son moment de spin par la relation :

$$\overrightarrow{M} = g\vec{S}$$, ou g est une constante.

1) Montrer que l'hamiltonien de ce système vaut : $H = w_0 S_z$, ou w_0 est une constante à déterminer.
2) Ecrire dans la base $\{ \ |\pm\rangle \ \}$des états propres de $\mathbf{S^2}$ et $\mathbf{S_z}$, la matrice représentant l'hamiltonien du système. En déduire la fréquence de Boher de ce système a deux niveaux.
3) L'état du système, à l'instant **t=0** est décrit par le vecteur :

$$|y\rangle = \cos(\frac{q}{1})|+\rangle + \sin(\frac{q}{2})|-\rangle$$

   a) Calculer la probabilité de trouver le système l'un des l'états $|+\rangle$ ou $|-\rangle$.
   b) Calculer la valeur moyenne de l'observable $\mathbf{S_z}$.
   c) En déduire la valeur moyenne de l'hamiltonien **H.**
4) On considère maintenant l'atome d'argent qui sort suivant un direction de vecteur $\vec{u}$ définie par les angles polaires q et j .
   a) Calculer la composante ($\mathbf{S_z}$) du moment cinétique suivant la direction $\vec{u}$.
   b) L'état du système est l'état correspondante à la valeur propre $\frac{\hbar}{2}$. Calculer la matrice de l'opérateur densité à cet état.
   c) Est-ce que cette matrice caractérise un état pur ou un mélange statistique d'états.
   d) Interpréter physiquement ce résultat.

B. On considère une particule de spin **3/2**. La base de l'espace des états constituée par les vecteurs propres $|s, m_s\rangle$, états propres communs à $\mathbf{S^2}$ et $\mathbf{S_x}$.

1) La particule est soumise à un champ de force dont l'effet est décrit par l'hamiltonien $H_0 = \frac{w^2}{3\hbar}(3S_x^2 - S^2)$, ou w_0 est une constante réelle positive.
   Déterminer les états propres de $\mathbf{H_0}$, ainsi que les niveaux d'énergies correspondants et leur degré de dégénérescence.
2) La particule est en plus soumise à un champ magnétique $\vec{B}$ parallèle à **Ox**.

a) Donner l'expression de l'hamiltonien **W** qui décrit l'interaction avec ce champ. On posera $w = -gB$, $B = \left|\vec{B}\right|$.

b) Déterminer les états propres et les valeurs propres de l'hamiltonien **H=H$_0$ +W**.

3) Le champ magnétique $\vec{B}$ est maintenant dans le plan **XOZ** et fait un angle b avec **Oz**..

a) Exprimer l'hamiltonien d'interaction W en fonction de b et w .

b) Le champ magnétique est supposé faible (w <<w_0) pour que **W** puisse être traiter comme une perturbation par rapport à **H$_0$**.

Déterminer les niveaux d'énergie au premier ordre en w_0 et les états propres à l'ordre zéro en w_0 .Commenter.

Exercice 3 :

On considère un système de moment cinétique $\vec{J}$. On se limite dans tout le problème à un sous espace à trois dimensions, sous-tendu par les trois kets $|1,1\rangle$, $|1,0\rangle$, $|1,-1\rangle$ états propres communs à **J^2** et **J$_z$**.

L'hamiltonien **H$_0$**du système est :

$$H_0 = aJ_z + \frac{b}{\hbar} J_z^2$$

Ou **a** et b sont des constantes positives, ayant les dimensions d'une pulsation.

1) Déterminer les niveaux d'énergie du système. Pour qu'elle valeur su rapport b/a y z-t-il dégénérescence ?

2) On applique un champ statique $\vec{B}_0$ dans une direction $\vec{u}$ d'angle q et j .L'interaction avec $\vec{B}_0$ du moment magnétique du système : $\vec{M} = -g\vec{J}$

(g étant le rapport gyromagnétique supposé négatif) est décrite par l'hamiltonien :

$$W = w_0 J_u$$

ou $w_0 = -g B_0$ est la pulsation de Larmor dans le champ $\overrightarrow{B_0}$ et J_u la composante $\overrightarrow{J}$ de sur la direction $\vec{u}$ ($J_u = \vec{J} \, . \, \vec{u}$).

Ecrire la matrice représentant **W** dans la base des trois états propres de **H$_0$**.

3) On suppose que **a=b** et que la direction $\vec{u}$ est parallèle à l'axe **Ox**. D'autre part, on a $w_0 << a$.
Calculer les énergies et les états propres du système à l'ordre 1 en w_0 pour les énergies et à l'ordre 0 pour les états propres.

4) On suppose que **b=2a** et que a toujours $w_0 << a$, la direction de $\vec{u}$ étant la base $\{|1,1\rangle, |1,0\rangle, |1,-1\rangle\}$, le développement de l'état fondamental $|y_0\rangle$ de **H=H0+W** , à l'ordre 1 en w_0 .

5) Calculer la valeur moyenne $\langle \overrightarrow{M} \rangle$ du moment magnétique $\overrightarrow{M}$ du système dans l'état $|y_0\rangle$. $\langle \overrightarrow{M} \rangle$ et $\overrightarrow{B_0}$ sont-ils parallèles ?