Série 1

Problème 1 :

- **H** est un opérateur hermétique, donc les valeurs propres de H sont réelles
- $|j_n\rangle$ états propre de **H**, $\mathbf{E_n}$ valeurs propres associe à $|j_n\rangle$
- **{**$|j_n\rangle$ **}** forme une base discret de x .
- Soit $U(m,n)$ un opérateur tel que :

$$U(m,n) = (|j_m\rangle\langle j_n|)$$

a) Calcule de l'adjoint de $U(m,n)$

$$U^+(m,n) = (|j_m\rangle\langle j_n|)^+ = |j_n\rangle\langle j_m|$$

$$= U(n,m)$$

b) Le commutateur $[H, U(m,n)]$

$$[H,U(m,n)]|y\rangle = HU(m,n)|y\rangle - U(m,n)H|y\rangle$$

$$[H,U(m,n)]|y\rangle = H|j_m\rangle\langle j_n|y\rangle - |j_m\rangle\langle j_n| H|y\rangle$$

$$= E_m|j_m\rangle\langle j_n|y\rangle - E_n|j_n\rangle\langle j_m|y\rangle$$

$$= (E_m - E_n)U(m,n)|y\rangle$$

donc : $[H,U(m,n)] = (E_m - E_n)U(m,n)$

c) $U(m,n)U^{+}(p,q) = |j_m\rangle\langle j_n|j_q\rangle\langle j_p|$

$$= |j_m\rangle d_{nq}\langle j_p| = d_{nq}|j_m\rangle\langle j_p|$$

$$= d_{nq}U(m,p)$$

$\langle j_n|j_q\rangle = d_{nq}$ car $\{|j_n\rangle\}$ forme une base discret.

d) Trace :

$$tr(U(m,p)) = \sum_i \langle j_i|U(m,n)|j_i\rangle$$

$$= \sum_i \langle j_i|j_m\rangle\langle j_n|j_i\rangle$$

$$= \sum_i d_{im}d_{ni} = d_{nm}$$

e) On a : **A=1A1** avec

$$\sum_n |j_n\rangle\langle j_n| = 1$$

relation de fermeture, donc :

A=1A1= $\sum_n |j_n\rangle\langle j_n|A\sum_m |j_m\rangle\langle j_m|$

$$= \sum_{n,m} |j_n\rangle\langle j_n|A|j_m\rangle\langle j_m| = \sum_{n,m} A_{nm}|j_n\rangle\langle j_m|$$

$$= \sum_{n,m} A_{nm}U(n,m)$$

f) On a :

$$AU^{+}(p,q) = \sum_{m,n} A_{m,n}U(m,n)U(p,q)$$

$$= \sum_{m,n} A_{m,n}|j_m\rangle\langle j_n||j_q\rangle\langle j_p|$$

$$= \sum_{m,n} A_{m,n}d_{nq}|j_m\rangle\langle j_p|$$

$$tr(AU^{+}(p,q)) = \sum_i \langle j_i|A_{m,n}U^{+}(p,q)|j_i\rangle$$

$$= \sum_{i} \langle j_i | \sum_{m,n} A_{m,n} d_{n,m} | j_m \rangle \langle j_p | g_i \rangle$$

$$= \sum_{i,m,n} d_{n,q} \langle j_i | A_{m,n} | j_m \rangle d_{p,i}$$

$$= \sum_{i,m,n} d_{n,q} A_{m,n} d_{p,i} \langle j_i | j_m \rangle$$

$$= \sum_{i,m,n} A_{m,n} d_{n,q} d_{p,i} d_{i,m}$$

$$= \sum_{m,n} A_{m,n} d_{n,q} \sum_{i} d_{p,i} d_{i,m}$$

$$= \sum_{m,n} A_{m,n} d_{n,q} d_{p,m}$$

$$= \sum_{m} d_{p,m} \sum_{n} A_{m,n} d_{n,q}$$

$$= \sum_{m} d_{p,m} A_{m,q}$$

$$= A_{pq}$$
