***Azrousoft***

# Algèbre PC1
## Série N° 1

## Exercice 1 :

Soit la loi * définie sur IR par :

$$x * y = xy - x\ y + 2$$

1) Montrer que * est commutative.
2) Déterminer l'élément neutre de IR pour la loi *.
3) Montrer que * est associative.
4) Déterminer les éléments symétrisables de IR pour la loi *.

## Exercice 2 :

Soit (G,*) un groupe.

On pose $GxG = \left\{ \ (x, y) / x \in G \quad et \quad y \in G \ \right\}$

On définie sur G une loi de composition interne par :

$$(x, y)\ T\ (z, t) = (x * z, y * t)$$

a) Montrer que ( G x G , T) est un groupe.

b) Soient $f: \ G \to G$ et $g: \ G \to G$ deux homomorphismes de groupes .

Montrer que l'application :

$$j: \ GxG \to GxG$$
$$(x, y) \to (f(x), g(y))$$

Est un homomorphisme de groupes.

## Exercice 3 :

On pose $A=\left\{ a+b\sqrt{2} \ / \ a,b \in Q \right\}$

1) a) Vérifier que A est stable pour l'addition et la multiplication.
   b) Montrer que (A , + , X )est un anneau commutatif et unitaire.

2) a) Déterminer les éléments symétrisables de A. Trouver leurs inverses
   b) A est-il un corps ?

3) Soit f l'application définie de QxQ dans A par :

$$f: \ QxQ \rightarrow A$$
$$(a,b) \rightarrow a+b\sqrt{2}$$

a) Montrer que f est un homomorphisme de groupes.
b) f est-il isomorphisme ?