
Algèbre PC1
Série N° 2

Exercice 1 :

- a) Soit $E = \mathbb{R}^3$. Montrer que les sous ensembles de E suivants sont des sous espaces vectoriels de E :

$$E_1 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \right\}$$
$$E_2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

- b) Montrer que le sous ensemble E_3 suivant est un sous espace vectoriel de \mathbb{R}^4 .

$$E_{31} = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = 0 \text{ et } 2z + t = 0 \right\}$$

- c) Trouver une famille génératrice de chacun des sous espaces vectoriels E_1 , E_2 et E_3 .

Exercice 2 :

Dans \mathbb{R}^3 , on considère les vecteurs :

$$a = (2, 3, -1) \quad b = (1, -1, -2) \quad c = (3, 7, 0)$$
$$d = (5, 0, -7) \quad e = (0, 0, 1)$$

- 1) Montrer que le sous-espace engendré par $\{a, b\}$ est égal au sous-espace engendré par $\{c, d\}$.
- 2) On pose $E = \overline{\{a, b\}}$ et $F = \overline{\{e, d\}}$.
Déterminer une famille génératrice de $E \cap F$.

Exercice 3 :

Soit $a=(3,1,-1)$, $b=(-1,1,2)$ et $c=(1,-1,1)$

- Montrer que les vecteurs a, b et c sont linéairement indépendants.
- Exprimer le vecteur $d=(5,-2,3)$ comme combinaison linéaire de a, b et c .

Exercice 4 :

Soient $V_1=(1,3,2,0)$, $V_2=(0,5,3,3)$, $V_3=(-1,2,1,3)$

$W_1=(1,1,-1,0)$ et $W_2=(2,11,7,3)$

On pose $E_1 = \overline{\{V_1, V_2, V_3\}}$ et $E_2 = \overline{\{W_1, W_2\}}$

- Déterminer $\dim E_1$ et $\dim E_2$.
- Déterminer $\dim (E_1 \cap E_2)$ et $\dim (E_1 + E_2)$.
- Donner une base de $(E_1 + E_2)$ et une base de $(E_1 \cap E_2)$.

Exercice 5 :

Soient $E = \mathbb{R}^3$, $E = \left\{ (x, y, z) \in E \mid x + y + z = 0 \right\}$ et
 $G = \left\{ (t, t, t) \mid t \in \mathbb{R} \right\}$.

- Vérifier que F et G sont supplémentaires.
- Trouver un autre supplémentaire de G .

Exercice 6 :

Soit $E = \mathbb{R}^4$. On pose $a=(1,1,0,0)$ et $b=(1,0,1,0)$

- Montrer que $B_1 = \{a, b\}$ est une famille libre de E .
- Compléter B_1 en une base de E .

Exercice 7 :

En utilisant les bases, montrer que les sous espaces :

$$F_1 = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathfrak{R}^4 \mid z=0 \text{ et } t=y \right\}$$

$$F_2 = \left\{ (2\mathbf{a}, 0, -\mathbf{a}, -\mathbf{a}) \mid \mathbf{a} \in \mathfrak{R} \right\}$$

$$F_3 = \left\{ (0, 0, 0, 4\mathbf{b}) \mid \mathbf{b} \in \mathfrak{R} \right\}$$

Vérifient : $\mathbb{R}^4 = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$