*Azrousoft*

# Algèbre PC1
# Série N° 3

## Exercice 1 :

On considère les deux applications suivantes :

$$f:\Re^3 \to \Re^2$$
$$(x,y,z) \longrightarrow (2y+z, x+3z)$$

$$f:\Re^3 \to \Re$$
$$(x,y,z) \longrightarrow (x+y, 2y, x-2y)$$

a) Montrer que ces 2 applications sont linéaires.
b) Déterminer fog et gof.
c) On pose $A=\left\{ \ (x,y,z) \quad / \quad x+y-z=0 \ \right\}$.
   Déterminer une base de f(A).
d) Déterminer Kerf et Imf.

## Exercice 2 :

On considère l'application :

$$f:\Re^3 \to \Re^3$$
$$(x,y,z) \longrightarrow (y+z, x+z, x+y)$$

a) Montrer que f est un automorphisme de $IR^3$ .
b) Déterminer $f^{-1}$ .

c) On pose

$F = \{ (x,y,z) \in \Re^3 \ / \ x+y+z=0 \}$ et

$G = \{ (x,y,z) \in \Re^3 \ / \ x=y=z \}$.

Déterminer f(F) et f(G).

d) Déterminer $f(e_1)$ , $f(e_2)$ , $f(e_3)$ ou $\{ e_1 , e_2 , e_3 \}$ est la base canonique de $IR^3$ .

## Exercice 3 :

Soit $E=IR^3$. On pose : $u_1=(1,2,1)$ ,$u_2=(1,0,3)$ et $u_3=(-1,2,-5)$

e) Déterminer le rang de la famille de vecteurs de $IR^3$ $\{u_1,u_2,u_3\}$.

## Exercice 4 :

Soit E= $IR^3$ . On considère les vecteurs de $IR^4$.

$V_1=(2,1,3,-1,)$,$V_2=(-1,1,-3,1)$,$V_3=(4,5,3,-1)$ et $V_4=(1,5,-3,1)$

a) Calculer $3V_1+2V_2$ puis $2V_1+3V_2$.

b) Quel est le rang de la famille de vecteurs de $IR^4$ $\{V_1,V_2,V_3,V_4\}$.

c) Trouver une base du sous-espace vectoriel engendré par $\{V_1,V_2,V_3,V_4\}$.

## Exercice 5 :

Soient $E_1$ et $E_2$ deux sous-espace vectoriels d'un même espace vectoriel E. On considère l'application :

$$f : E_1 x E_2 \rightarrow E$$
$$(V_1, V_2) \longrightarrow V_1 + V_1$$

a) Montrer que f est linéaire et que Imf= $E_1 + E_2$ .

b) On désigne par F la partie de $E_1$ x $E_2$ formée des éléments de la forme (v,-v) ou $v \in E_1 \cap E_2$ , cest à dire :

$$F = \left\{ \ (-v, v) \ \in \ E_1 x E_2 \ / \ v \in E_1 \cap E_2 \ \right\}$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $E_1$ x $E_2$ et que F=Ker f.

En déduire un isomorphisme de Ker f sur $E_1 \cap E_2$ .

## Exercice 6 :

Soit f l'endomorphisme définie sur $IR^3$ par :

$f(e_1) = f(e_2) = f(e_3) = e_1 + e_2 + e_3$

a) Determiner Kerf et Imf.

b) Calculer $f^2$ et montrer que $f^2$-3f=0.

c) Calculer $f^n$.

## Exercice 7 :

Soit u l'endomorphisme sur $IR^3$ définie par :

$U(e_1)=e_2+e_3$ , $u(e_2)=e_1+e_3$ , $u(e_3)=e_1+e_2$.

1) Déterminer Keru et Imu.

2) Soit B'={e'$_1$, e'$_2$, e'$_3$} ou

$e'_1=e_1-e_2$ , $e'_2=e_1-e_3$ et $e'_3=e_1+e_2+e_3$

a) Montrer que B' est une base de $IR^3$.
b) Calculer $u(e'_1)$ , $u(e'_2)$ et $u(e'_3)$ dans la base B'.
c) Calculer $u^n(e'_1)$ , $u^n(e'_2)$ et $u^n(e'_3)$.
d) En déduire $u(x,y,z)$ dans la base B.