PC1 98/99
Série 1
Analyse

## Exercice 1 :

**Soit A=[1,2[**

1) **Montrer que A est borné.**
2) **Déterminer les bornes inférieures et supérieures de A.**
3) **A admet il un plus petit élément ?**

## Exercice 2:

Mettre sous forme d'intervalle l'ensemble suivant :

$$A=\left\{ x\in\Re \quad tels \quad que \quad \left| x-1 \right| \leq 4 \right\}$$

## Exercice 3 :

**Soit** $A=\left\{ a_n=(-1)^n+\frac{1}{n!} \quad ; \quad n\in N^* \right\}$

**Déterminer inf A est sup A.**

## Exercice 4:

$$A=\left\{ x\in Q \quad tels \quad que \quad x^2<2 \right\}$$

Etudier les bornes sup et inf de A.

## Exercice 5 :

**Montrer que** $\forall n\in N^* \quad \frac{1}{n!}\leq\frac{1}{2^{n-1}}$

**En déduire que la suite de terme général**

$u_n = 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ **est convergente**

**Et que** $\lim_{n \to +\infty} u_n \leq 2$

## Exercice 6:

Soit la suite réelle $(u_n)_{n \in N}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \Re \quad , \quad u_0 \geq 4 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \quad \forall n > 0 \end{cases}$$

1) Exprimer $u_n$ en fonction de $u_0$ et n.
2) En déduire la nature de la suite $(u_n)$

## Exercice 7 :

**Etudier la nature de la suite**

$u_0 \geq -1$

$u_n = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + u_{n-1})}$

## Exercice 8: (Facultatif)

**Utiliser le critère de Cauchy pour étudier la nature des suites suivantes :**

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$$

$$v_n = \frac{1}{2} + \frac{-1}{2^2 + \log 2} + \frac{1}{2^3 + \log 3} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{2^n + \log n}$$

## Exercice 9:

Nature de la suite :

$$u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} \qquad a + b \neq 0$$