Azrousoft

Algèbre PC1
Série N° 1

Exercice 1 :

Les applications suivantes sont elles injectives, surjectives, Bijectives :

1) $$f : \Re \to \Re \times \Re$$
$$x \to (x, x)$$

2) $$g : C \to \Re$$
$$x + iy \to y$$

Exercice 2 :

Soit $f : A \to B$ une application.

1) $A_1, \ldots, A_n$ étant des parties de A, on note

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \quad \text{et} \quad \bigcap_{i=1}^{n} A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$$

Montrer que :

a) $f(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \bigcup_{i=1}^{n} f(A_i)$

b) $f(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \subset \bigcap_{i=1}^{n} f(A_i)$

c) Si f est injectif alors on a : $f(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \bigcap_{i=1}^{n} f(A_i)$

2) $B_1, B_2, \ldots, B_p$ étant des parties de B, montrer que :

a) $f^{-1}(\bigcup_{j=1}^{p}\mathbf{B}_j)=\bigcup_{j=1}^{p} f^{-1}(B_j)$

b) $f^{-1}(\bigcap_{j=1}^{p}B_j)=\bigcap_{j=1}^{p} f^{-1}(B_j)$

Exercice 3 :

Soit $f:E\rightarrow F$ et $g:F\rightarrow G$ deux applications, montrer que :

1) a) f et g injectives $\Rightarrow$ gof injective.
   b) gof injective $\Rightarrow$ f injective.
2) a) f et g surjectives $\Rightarrow$ gof surjective.
   b) gof surjective $\Rightarrow$ g surjective.

Exercice 4 :

Montrer que l'ensemble des rationnels de la forme $\frac{1+2p}{1+2q}$

Ou p,q $\in Z$ est un sous-groupes du groupe multiplicatif

Q^*

Exercice 5 :

On définit sur l'ensemble $\Re$ les deux lois suivantes:

a T b = a+b-1 et a*b=ab-a-b+2

1) Montrer que ($\Re$,T) est un groupe abélien.
   Calculer son élément neutre e et le symétrique de a.
2) Soit $\Re^{'}=\Re-\{e\}$. Montrer que ($\Re^{'}$,*) est un groupe abélien. Calculer son élément neutre e' et le symétrique a' de a.
3) Montrer que ($\Re$,T,*) est un anneau commutatif, Est il un corps ?

4) Montrer que $\underbrace{aTaT\ldots\ldots\ldots Ta}_{n fois} = na+1-n \quad (\forall n \geq 1)$.

Exercice 6 :

Dans $\Re^2$, on pose : $(x,y)\ T\ (x',y') = (xx'-yy', xy'+x'y)$.

On note $\Re^{2*} = \Re^2 - \{(0,0)\}$.

1) Vérifier que la loi T est associative et que qu'elle admet un élément neutre.
2) Soit $(x,y) \in \Re^{2*}$; déterminer, s'il existe, son élément symétrique pour la loi T.
3) En déduire que $(\Re^{2*}, T)$ est un groupe, Ce groupe est il abélien ?

(Facultatif 4 et 5)

4) Résoudre dans le groupe $(\Re^{2*}, T)$ l'équation :

   $(2,3)\ T\ (x,y) = (1,5)$
5) On note $(x,y)^2 = (x,y)T(x,y)$.

   Résoudre dans le groupe $(\Re^{2*}, T^*)$ l'équation : $(x,y)^2 = -(15,8)$