PC1 98/99

Série 7

Analyse

Exercice 1 :

Calculer :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}\right)$

Exercice 2:

Montrer que $\begin{array}{c} f:\Re\to\Re \\ x\to\sin(x)+x \end{array}$ est croissante

En déduire une écriture simple de sin comme somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante.

Exercice 3 :

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties :

a) $\int_0^x arctg(t)dt$ b) $\int_1^x \log(t)^2 dt$

c) $\int_1^x (t^2-t+1)\log(t)dt \quad (x>0)$

d) $\int_0^x e^t(t^3-2t^2+5t-1)dt$

Exercice 4 :

Calculer les intégrales suivantes en effectuant le changement de variable indiqué :

a) $\int_0^x \frac{dt}{e^t+e^{-t}} \quad (u=e^t)$

b) $\int_0^x t(2t+1)^n dt \quad (u=2t+1 \quad n\in \mathbb{N})$

c)

$$\int_{1/2}^x \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} \quad (u=\arcsin\sqrt{t}\ ) \quad ; \quad (\frac{1}{2}\leq x\leq 1))$$

Exercice 5 :

Au myen d'un changement de variable, calculer les primitives des fonctions suivantes :

a) $f_1(t)=\frac{\cos(t)}{1+\sin^2(t)}$ b) $f_2(t)=\frac{t}{\sqrt{t^n-1}}$

c) $f_3(t)=(\arcsin(t))^2$ d) $f_1(t)=\frac{\cos(t)}{(1-\cos(t))^2}$

Exercice 6 :

Décomposer en élément simples et calculer une primitive de chacune des fonctions rationnelles suivantes :

a) $\dfrac{t^3+2t^2+2t+1}{t\ (t^2+1\ )}$ b) $\dfrac{6}{(t^6-1\ )}$

c) $\dfrac{t^2}{(t^2+t+1\ )^2}$ d) $\dfrac{1}{(t-1)(t-2)(t-3)}$

Exercice 7 :

1) Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_a^b \frac{2t+3}{t^2\sqrt{2t+1)}}dt \quad (0<a<b)$$

$$\int_a^b \sqrt{\frac{t-1}{t+1}}dt \quad (1<a<b)$$

2) Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

$$\frac{1}{\sqrt{t^2-2t+2}} \quad ; \quad \frac{1}{\sqrt{t^2-2t}} \quad ; \quad \frac{1}{\sqrt{2t-t^2}}$$

Exercice 8 :

1) Déterminer suivant les valeurs de n, la nature de l’intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log(x)}{x}dx$$

2) Calculer les intégrales généralisés suivantes après avoir établi leur convergence :

a) $\int_0^{+\infty} \frac{arctg(t)}{1+t^2}dt$; b) $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$