
Algèbre PC1
Série N° 1

Exercice 1 :

Les applications suivantes sont elles injectives, surjectives, Bijectives :

1)
$$f : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}$$
$$x \rightarrow (x, x)$$

2)
$$g : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{R}$$
$$x + iy \rightarrow y$$

Exercice 2 :

Soit $f : A \rightarrow B$ une application.

1) A_1, \dots, A_n étant des parties de A , on note

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \quad \text{et} \quad \bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$$

Montrer que :

a)
$$f\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \bigcup_{i=1}^n f(A_i)$$

b)
$$f\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \subset \bigcap_{i=1}^n f(A_i)$$

c) Si f est injectif alors on a :
$$f\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \bigcap_{i=1}^n f(A_i)$$

2) B_1, B_2, \dots, B_p étant des parties de B , montrer que :

$$\text{a) } f^{-1}\left(\bigcup_{j=1}^p B_j\right) = \bigcup_{j=1}^p f^{-1}(B_j)$$

$$\text{b) } f^{-1}\left(\bigcap_{j=1}^p B_j\right) = \bigcap_{j=1}^p f^{-1}(B_j)$$

Exercice 3 :

Soit $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications, montrer que :

- 1) a) f et g injectives \Rightarrow $g \circ f$ injective.
b) $g \circ f$ injective \Rightarrow f injective.
- 2) a) f et g surjectives \Rightarrow $g \circ f$ surjective.
b) $g \circ f$ surjective \Rightarrow g surjective.

Exercice 4 :

Montrer que l'ensemble des rationnels de la forme $\frac{1+2p}{1+2q}$

Où $p, q \in \mathbb{Z}$ est un sous-groupe du groupe multiplicatif

\mathbb{Q}^*

Exercice 5 :

On définit sur l'ensemble \mathfrak{R} les deux lois suivantes:

$$a \text{ T } b = a+b-1 \text{ et } a * b = ab-a-b+2$$

- 1) Montrer que (\mathfrak{R}, T) est un groupe abélien.
Calculer son élément neutre e et le symétrique de a .
- 2) Soit $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R} - \{e\}$. Montrer que $(\mathfrak{R}', *)$ est un groupe abélien. Calculer son élément neutre e' et le symétrique a' de a .
- 3) Montrer que $(\mathfrak{R}, \text{T}, *)$ est un anneau commutatif, Est il un corps ?

4) Montrer que $\underbrace{aTaT\dots\dots Ta}_{n\text{fois}} = na+1-n \quad (\forall n \geq 1)$.

Exercice 6 :

Dans \mathfrak{R}^2 , on pose : $(x,y) T (x',y') = (xx' - yy', xy' + x'y)$.

On note $\mathfrak{R}^{2*} = \mathfrak{R}^2 - \{(0,0)\}$.

- 1) Vérifier que la loi T est associative et que qu'elle admet un élément neutre.
- 2) Soit $(x,y) \in \mathfrak{R}^{2*}$; déterminer, s'il existe, son élément symétrique pour la loi T.
- 3) En déduire que (\mathfrak{R}^{2*}, T) est un groupe, Ce groupe est il abélien ?

(Facultatif 4 et 5)

4) Résoudre dans le groupe (\mathfrak{R}^{2*}, T) l'équation :

$$(2,3) T (x,y) = (1,5)$$

5) On note $(x,y)^2 = (x,y)T(x,y)$.

Résoudre dans le groupe (\mathfrak{R}^{2*}, T^*) l'équation :

$$(x,y)^2 = -(15,8)$$

