TD : Série N°2 PC2
Analyse

- ## Exercice 1:

Soit $\sum_n U_n$ une série donnée. Montrer que la série $\sum_n U_n$ est absolument convergent si et seulement si la série $\sum_n \log(1+U_n)$ est absolument convergente.

- ## Exercice 2:

Soit $\sum_n U_n$ et $\sum_n V_n$ deux séries à termes positifs.

1. Montrer que si $\sum_n U_n$ est convergente alors $\sum_n U_n^2$ et $\sum \frac{U_n}{1+U_n}$ sont aussi convergents.
2. Montrer que si $\sum_n U_n$ et $\sum_n V_n$ sont convergentes alors $\sum_n \sqrt{U_n V_n}$ et $\sum_n U_n V_n$ sont convergentes.
3. Montrer que les résultats précédents ne subissent plus les séries $\sum_n U_n$ et $\sum_n V_n$ ne sont pas à termes positifs.

- ## Exercice 3:

Soit $\sum_n U_n$ une série telle que $U_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.

1. Montrer que si $\lim_{n} \frac{|U_{n+1}|}{|U_n|} = \ell$, avec ℓ finie ou non, alors

$$\lim_{n} \sqrt[n]{|U_n|} = \ell$$

2. On donne deux réels a>0 ,b>0 , on définit $\sum_n U_n$ avec $U_{2n} = a^n b^n$ et $U_{2n+1} = a^{n+1} b^n$.

   Etudier cette série par les règles de Cauchy et D'Alembert.

3. Etudier alors la réciproque de l'implication de 1)

- Exercice 4:

On considère la série de terme général $U_n \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}, n \geq 1$

1. Montrer que la série $\sum_n U_n$ est semi-convergent.
2. On considère la série de terme général:

$$V_n = \frac{1}{\sqrt{4(n-1)+1}} + \frac{1}{\sqrt{4(n-1)+3}} - \frac{1}{\sqrt{2n}}, n \geq 1$$

   - Montrer que la série $\sum_n V_n$ est obtenue à partir de $\sum_n U_n$ en changeant l'ordre de ses termes.
   - Montrer que la série $\sum_n V_n$ est divergente. Conclure.

- Exercice 5:

Soit la série de terme général

1) $U_n = \frac{n^2}{n!}$

2) $U_n = \frac{2n-1}{n\,(n^2-4)}$

3) $U_n = \log\left(1+\frac{2}{n(n+3)}\right),\ n \geq 1$

1. Montrer que $\sum_n U_n$ est une série alternée. Les hypothèses du théorème sur les séries alternées sont-elles touts satisfaites? Peut-on conclure?
2. Montrer que la série $\sum_n U_n$ est divergente.

- Exercice 6:

On considère la suite de fonctions (f_n) définies par:

$$f_n(x) = \begin{cases} n(x^n - x^{n+1}) \text{ pour } x \in [0,1] \\ 0 \qquad \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction f à préciser

1. La convergence est-elle uniforme?

- Exercice 7:

On considère la série de fonctions $\sum_n f_n$ avec:

$$f_n(x) = x(1-x)^n \text{ , } x \in \Re$$

1. Montrer que $\sum_n f_n$ est simplement convergente sur [0,1]

   .Calculer $\sum_n^{\infty} f_n$ pour $x \in [0,1]$
2. La convergence est-elle uniforme sur [0,1]?
