TD :Serie N°3 PC2
Analyse

- ## Exercice 1:

1. Soit (f_n) une suite de fonctions réelles qui CV uniformément sur $I=[a,b]$ vers une fonction f.
   Soit (X_n) une suite numérique d'éléments de I qui CV vers x appartenant à I.
   Montrer que la suite $f_n(X_n)$ CV vers $f(x)$.
2. Soit f_n la fonction réelle définie sur [0,PI/2] par :

$$f_n(x)=\begin{cases} 0 \text{ si } x=0. \\ \dfrac{\sin^2[(n+1)x]}{(n+1)\sin(x)} \; si \; 0<x<\dfrac{p}{2} \end{cases}$$

   - Montrer que f_n CV simplement sur $[0,\frac{p}{2}]$
   - Etudier la suite $f_n(\frac{p}{2(n+1)})$
   - La CV de f_n est elle uniforme sur $[0,\frac{p}{2}]$, sur $[a,\frac{p}{2}]$ avec $0<a<\frac{p}{2}$.

- ## Exercice 2:

Etudier le rayon de convergence de sigma(n) $a_n Z^n$ avec :

1. $a_n = \log(n)$, $n \geq 1$

2. $a_n = [\frac{n}{2n+1}]^{n^2}$, $n \geq 0$

3. $a_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$, $p \geq 1$

4. $a_n = [\frac{(2n)! n^{2n}}{2^n n! (3n)!}]$, $n \geq 0$

5. a_n est le nombre de division de n , $n \geq 1$

- ## Exercice 3:

Etudier le domaine de CV de sigma(n) a_n X^n , $x \in \Re$.

i. $a_n = ch(na)$, a > 0 , a est un paramètre.

ii. $a_n = \frac{1}{1+2+3+...+n}$, $n > 0$, en déduire que la série numérique $\sum_n \frac{(-1)^n}{1+2+3+...+n}$ est CV. Calculer sa somme.

- ## Exercice 4:

Trouver le développement en série entier au voisinage de 0 en indiquant le rayon de CV

iii. $\log(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}})$

iv. $arctg(\frac{1-x^2}{1+x^2})$

- exercice 5:

Déterminer la série de fourrier de f, de période T= $2p$ dans les cas suivants:

1) $f(x)=\frac{|x|}{2}, -p \le x \le p$

2) $$f(x)=\begin{cases} \frac{p}{4}, si \frac{-p}{2}<x<\frac{p}{2} \\ \frac{-p}{4}, si \frac{p}{2}<x<\frac{3p}{2} \\ 0, si\ x=\frac{p}{2} ou\ x=\frac{-p}{2} \end{cases}$$

On déduire que $\sum_n \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{p}{4}$

Benkeroum Younes March 142004.